

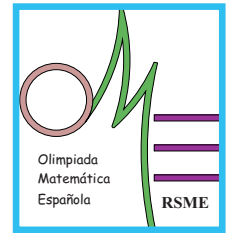


# IV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 18 de enero de 2019



1. Para cada número de cuatro cifras  $\overline{abcd}$ , denotamos por  $S$  al número  $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$ . Demuestra que  $S$  es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número  $\overline{abcd}$  son iguales.

2. Demuestra que para todo  $n \geq 2$  podemos encontrar  $n$  números reales

$$x_1, x_2, \dots, x_n \neq 1$$

de manera que los productos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

son iguales.

3. El trapecio isósceles  $ABCD$  tiene lados paralelos  $AB$  y  $CD$ . Sabemos que  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{AD} = 5$  y  $\angle DAB = 60^\circ$ . Se lanza un rayo de luz desde  $A$  que rebota en  $CB$  en el punto  $E$  e interseca en  $AD$  en el punto  $F$ . Si  $\overline{AF} = 3$ , calcula el área del triángulo  $AFE$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

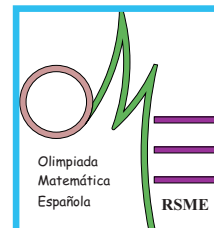


# LV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 18 de enero de 2019



4. Sea  $p \geq 3$  un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor  $p^2 - 1$  y cateto menor  $2p$ . Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de  $p$  para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.
5. ¿Existen  $m, n$  números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

6. Fijamos un número natural  $k \geq 1$ . Encuentra todos los polinomios  $P(x)$  que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**